

Control 1

Cálculo en Varias Variables - Semestre Otoño 2006

Profesor: Marcelo Leseigneur
Auxiliares: Rodrigo Assar, Sebastián Court

Problema 1.- Discuta la veracidad de las siguientes afirmaciones. En caso de ser ciertas debe probarlas y en caso contrario dar un contraejemplo:

- (a) Sea $E = \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ el conjunto de las matrices de $m \times n$ con coeficientes en \mathbb{R} . Se define para $A, B \in E$, la siguiente función:

$$\langle A, B \rangle = \text{Traza}(AB^t)$$

Entonces dicha función es un producto interno en E .

- (b) Se define en \mathbb{R} la siguiente métrica:

$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$$

Entonces (\mathbb{R}, d) es un espacio métrico completo, es decir las sucesiones de Cauchy necesariamente convergen.

- (c) Sea $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n, z_1, z_2, \dots, z_n$ elementos de \mathbb{R} . Entonces se cumple que

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i z_i \right)^4 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^4 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^2 \left(\sum_{i=1}^n z_i^4 \right)$$

- (d) Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y $B \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto cualquiera entonces $A + B$ no necesariamente es abierto.
Indicación: $A + B = \{x + y \in \mathbb{R}^n / x \in A, y \in B\}$

- (e) La intersección de una familia arbitraria de cerrados es un cerrado.

- (f) Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado, y $A \subset E$. Si $x \in \partial A$ entonces x es un punto de acumulación de A .

Problema 2.-

- (a) Consideremos a \mathbb{R}^n con $\|\cdot\|$ como norma, y sea $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$d(x, y) = \begin{cases} \|x\| + \|y\| & \text{si } \|x\| \neq \|y\| \\ \|x - y\| & \text{si } \|x\| = \|y\| \end{cases}$$

- (i) Demuestre que d es una métrica en \mathbb{R}^n .
(ii) Determine si d proviene de una norma en \mathbb{R}^n .
(iii) Considere el caso $n = 2$ y $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$. Determine analítica y gráficamente $B(a, r)$ y $B[a, r]$ con $a \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$ en los casos $a = (0, 0)$ y $a = (1, 1)$ con $r = 1$ y $r = 3$.
- (b) Dibuje los siguientes conjuntos, luego calcule su interior, adherencia y frontera. Concluya si A es abierto, cerrado, ninguno o ambos. Argumente.

- (i) $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n, n+1)$ con $(n, n+1) \subset \mathbb{R}$
- (ii) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 1, x^2 + y^2 < 1\}$
- (iii) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = r^2 \ \forall r, 0 < r < 1, r \in \mathbb{Q}\}$
- (iv) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \wedge 0 \leq y \leq 1\}$
- (v) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 < 1\}$
- (vi) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1, \ x^2 + y^2 > 1/4\} \cup S$, donde S es el segmento del eje x tal que $1 \leq x \leq 2$.

Problema 3.-

- (a) Considere $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ el espacio vectorial de todas las funciones continuas de $[a, b]$ en \mathbb{R} . Para $f \in E$ se define:

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad 1 \leq p < \infty$$

Pruebe que $\|\cdot\|_p$ define una norma en E .

Indicación: Puede serle útil usar la desigualdad de Holder:

$\forall f, g \in E, \forall p, q \geq 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, se cumple que

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

- (b) En $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ considere la sucesión de funciones dada por $f_n(x) = x^n$.
Pruebe que $f_n \rightarrow 0$ para la norma $\|\cdot\|_1$ pero que $f_n \not\rightarrow 0$ con $\|\cdot\|_\infty$.
- (c) En $\mathcal{C}([1, 2], \mathbb{R})$ considere la sucesión de funciones $g_k(x) = 2 - (2 - x)^k$.
Mostrar que $g_k \rightarrow 2$ con norma $\|\cdot\|_1$.
- (d) Finalmente en $\mathcal{C}([0, 2], \mathbb{R})$ considere

$$h_k(x) = \begin{cases} x^k & \text{si } x \in [0, 1] \\ 2 - (2 - x)^k & \text{si } x \in [1, 2] \end{cases}$$

Muestre que $\{h_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy para $\|\cdot\|_1$, pero no converge en $\mathcal{C}([0, 2], \mathbb{R})$ con norma $\|\cdot\|_1$.

Tiempo: 3 hrs